Санкт-Петербургский государственный университет
Высшая школа менеджмента

НАУЧНЫЕ ДОКЛАДЫ

А.В.Зятчин

СИЛЬНЫЕ РАВНОВЕСИЯ В ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫХ МОДЕЛЯХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

№ 5 (R)–2011

Санкт-Петербург

2011

А.В.Зятчин. Сильные равновесия в теоретико-игровых моделях и их приложения. Научные доклады, № 5 (R)–2011. СПб.: ВШМ СПбГУ, 2011.

Ключевые слова и фразы: равновесие по Нэшу, кооперативное решение, принцип оптимальности.

Теоретико-игровой подход широко используется при исследовании моделей конфликтно-управляемых систем в различных областях теории менеджмента. Это обусловлено универсальностью методов теории игр и, в частности, принципов оптимальности, использование которых в отдельной задаче определяет оптимальное поведение всех заинтересованных лиц (игроков), принимающих решения. Особый интерес представляют решения, устойчивые относительно отклонения произвольных коалиций игроков. Одним из таких принципов оптимальности являются сильные равновесия.

В настоящей работе представлены теоретико-игровые постановки задач управления запасами, конкурентной рекламы и проч. Предложена техника нахождения сильных равновесий в одношаговых и дифференциальных играх.

Зятчин Андрей Васильевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры операционного менеджмента Высшей школы менеджмента Санкт-Петербургского государственного университета.

e-mail: zyatchin@gsom.spbu.ru

St. Petersburg University
Graduate School of Management

WORKING PAPER

A.V. Zyatchin

STRONG EQUILIBRIA IN GAME THEORY MODELS AND APPLICATIONS

 # 5 (R)–2011

Saint Petersburg
2011

A.V. Zyatchin. Strong equilibria in game theory models and applications. Working Paper # 5 (R)–2011. Graduate School of Management, St. Petersburg University: SPb, 2011.

Keywords and phrases: Nash equilibrium, cooperative solution, optimality principle.

Abstract: Game-theory approach is widely used in investigations of controlled systems in different fields of management. This is due to the universality of the games theory techniques and, in particular, principles of optimality. Implementation of an optimality principle in a game gains the optimal players' behavior. One of such optimality principles is strong equilibrium, which is stable against of deviations of any coalitions.

This paper presents the game-theoretic formulation of inventory problem, competitive advertising, and so on. A technique for finding strong equilibria in one-step and differential games is considered.

Andrey V. Zyatchin — Candidate of Sciences in Physics and Mathematics (First Doctoral Degree), Assistant Professor, Graduate School of Management, St. Petersburg University

e-mail: zyatchin@gsom.spbu.ru

Содержание

ВВЕДЕНИЕ 6
1. ИГРА В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ 6
1.1 Определение игры в нормальной форме. 7
1.2 Игры двух лиц. Матричные и биматричные игры. 7
1.3 Примеры игр двух лиц. 9
2. ПРИНЦИПЫ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ИГРЫ В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ 11
2.1 Сильное равновесие 11
3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА 14
3.1 Определение дифференциальной игры. 15
3.2. Примеры постановок дифференциальных игр. 16
3.3 Сильное равновесие в дифференциальной игре. 17
3.4. Пример применения техники поиска сильного равновесия в дифференциальной игре конечной продолжительности. 22
ВЫВОДЫ 25
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 26
EXECUTIVE SUMMARY 28

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время известно несколько концепций сильного равновесия [Мулен, 1958; Aumann, 1959; Petrosyan, Grauer 2002]. При этом в каждом случае под сильным равновесием понимается ситуация, в определенном смысле устойчивая относительно коалиционных отклонений игроков. Этот принцип оптимальности исследован в широких классах игр в нормальной и развернутой формах (см. например [Зенкевич, Зятчин, 2009a; Зенкевич, Зятчин, 2009b; Зенкевич, Петросян, Янг, 2009; Зенкевич, Зятчин, 2010; Zenkevich, Zyatchin, 2011]). Основным недостатком концепции сильного равновесия является то, что оно существует достаточно редко.

При исследовании дифференциальных игр часто используется принцип оптимальности Беллмана [Basar, 1977; Флеминг, Ришел, 1978; Вайсборд, Жуковский, 1980; Basar, Olsder, 1995; Yeung, Petrosyan, 2006]. В этом случае задача определения оптимального значения интегрального функционала сводится к решению экстремального уравнения в частных производных. С помощью такой техники в ряде случаев удается найти равновесие по Нэшу и парето-оптимальное решение [Чистяков, 1992; Zenkevich, Zyatchin, 2007]. При этом в исследуемой модели необходимо дополнительно учитывать условия существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений, описывающей динамику игры, гладкость функции Беллмана, а также функций мгновенного и терминального выигрышей игроков.

В данной работе предлагается следующая техника нахождения сильного равновесия в дифференциальной игре. Для каждой коалиции с помощью специальной свертки осуществляется переход к экстремальной задаче со скалярным критерием, зависящим от набора параметров. Формулируются достаточные условия существования сильного равновесия в дифференциальной игре в виде условий на параметры свертки. Использование теоремы продемонстрировано на примере линейно-квадратичной несимметричной игры. Для этой игры сильное равновесие удалось построить в явном виде на основе решения уравнения в частных производных первого порядка специального вида.

1. ИГРА В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Введем понятие игры в нормальной (стратегической) форме. К настоящему времени разработана общая формализация игры (нормальная или стратегическая форма), в которую вписываются многие конфликтно-управляемые системы с конечным числом участников. В этой формализации игра представляется как конечный набор определенных объектов.

1.1 Определение игры в нормальной форме.

Определение 1. *Система*:

$$\Gamma_N = \langle N; X_1,...,X_i,...,X_n; K_1,...,K_i,...,K_n \rangle,$$

где $N = \{1,\cdots,i,\cdots,n\}$ *– множество игроков,* $X_i = \{x_i\}$ *– множество стратегий игрока* i*,* $K_i(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$ *– функция выигрыша игрока* i*, принимающая вещественные значения, называется игрой в нормальной форме или бескоалиционной игрой.*

Значение функции выигрыша $K_i(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$ есть *выигрыш*, который получает игрок i, если игроками $1,...,i,...,n$ используются соответственно стратегии $x_1,...,x_i,...,x_n$.

Игра в нормальной форме реализуется следующим образом. Игроки одновременно и независимо друг от друга выбирают свои стратегии x_i из множества всех своих возможных стратегий X_i. В результате такого выбора формируется набор стратегий

$$x_N = (x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n), x_N \in X_N \equiv \prod_{i\in N} X_i,$$

который называется *ситуацией*. При этом множество X_N называется *множеством всех ситуаций* в данной игре Γ_N.

После выбора стратегий каждым игроком игра прекращается, и каждый из игроков i получает выигрыш, который вычисляется как значение функции его выигрыша K_i в этой реализовавшейся ситуации x_N, то есть величину $K_i(x_N) = K_i(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$.

Одним из фундаментальных вопросов, возникающих теории игр в нормальной форме, является определение принципа оптимальности поведения игроков.

1.2 Игры двух лиц. Матричные и биматричные игры.

Игрой двух лиц называется игра в нормальной форме Γ, в которой принимают участие два игрока [Von Neumann, Morgenstern, 1944]. Игра в нормальной форме двух лиц задается следующими объектами:

множеством стратегий первого игрока X_1, множеством стратегий второго игрока X_1, функцией выигрыша первого игрока K_1 и функцией выигрыша второго игрока K_2. То есть

$$\Gamma = \left\langle X_1, X_2, K_1, K_2 \right\rangle.$$

Игра в нормальной форме двух лиц с конечным множеством стратегий у обоих игроков называется *биматричной игрой*. Предположение о конечном множестве стратегий игроков позволяет поставить в соответствие каждой стратегии первого игрока одно из чисел: $1,2,...,m$, а каждой стратегии второго игрока – одно из чисел: $1,2,...,n$. Следовательно, выигрыш каждого игрока можно задать в виде матрица, размерностью $m \times n$:

$$K_1 = A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } K_2 = B = \begin{pmatrix} b_{11} & ... & b_{1n} \\ ... & ... & ... \\ b_{m1} & ... & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элементы a_{ij} и b_{ij} матриц A и B являются выигрышами первого и второго игрока соответственно в ситуации (i, j), где $i \in \{1,...,m\}$, $j \in \{1,...,n\}$. В этих обозначениях, выигрыш обоих игроков можно представить в единой матрицы (A, B), элементами которой являются пары (a_{ij}, b_{ij}), $i \in \{1,...,m\}$, $j \in \{1,...,n\}$:

$$(A, B) = \begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & ... & (a_{1n}, b_{1n}) \\ ... & ... & ... \\ (a_{m1}, b_{m1}) & ... & (a_{mn}, b_{mn}) \end{pmatrix}.$$

Биматричная игра реализуется следующим образом. Первый игрок независимо от второго игрока выбирает номер i строки матрицы (A, B). Второй игрок – номер j столбца матрицы. В результате выбора игроками своих стратегий в игре реализуется ситуация (i, j). Тогда первый игрок получает выигрыш $a_{ij} = K_1(x_i, y_j)$, второй игрок получает выигрыш $b_{ij} = K_2(x_i, y_j)$. Биматричную игру будем обозначать также

$$\Gamma_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}).$$

Пусть игра в нормальной форме Γ двух лиц такова, что для любой ситуации (x, y), $x \in X$, $y \in Y$ имеет место равенство: $K_1(x, y) = -K_2(x, y)$, тогда игра Γ называется *антагонистической*. В частном случае, если в биматричной игре имеет место равенство $a_{ij} = b_{ij}$ для всех $i \in \{1,...,m\}$, $j \in \{1,...,n\}$, то такая игра *называется матричной*, поскольку для того, чтобы задать матричную игру, достаточно определить лишь матрицу выигрышей первого игрока:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для матричных игр будем использовать обозначение

$$\Gamma_1(\mathbf{A}).$$

1.3 Примеры игр двух лиц.

Пример 1. Игра «Семейный спор» [Петросян, Зенкевич, Семина, 1998].

Рассмотрим биматричную игру $\Gamma_2(\mathbf{A,B})$ с матрицей:

$$\begin{pmatrix} (2,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,2) \end{pmatrix}.$$

Существуют различные трактовки такой биматричной игры, наиболее распространенной из них является следующая. У каждого из двух игроков (назовем их «муж» и «жена») существует возможность выбрать одну из стратегий: футбольный матч (стратегия 1) или театр (стратегия 2). Если выбранные игроками стратегии совпадают, то игроки посещают соответствующее мероприятие. Это возможно в том случае, если оба игрока выбрали стратегию «футбольный матч», т.е. реализовалась ситуация $(1,1)$; или оба игрока выбрали альтернативу «театр», т.е. реализовалась ситуация $(2,2)$. В ситуации $(1,1)$ первый и второй игрок получают соответственно выигрыши $(2,1)$, в ситуации $(2,2)$ игроки получают выигрыши $(1,2)$. В случае несовпадения выбранных игроками стратегий игроки получают нулевые выигрыши.

Пример 2. Игра «Распределение ограниченного ресурса» [Петросян, Зенкевич, Семина, 1998].

Пусть n потребителей имеют возможность расходовать (накапливать) некоторый ресурс, объем которого ограничен величиной $A>0$. Обозначим через x_i объем ресурса, который расходует (накапливает) потребитель i. В зависимости от значений вектора $x=(x_1,...,x_n)$ потребитель i получает выигрыш $h_i(x_1,...,x_n)$, если суммарный объем израсходанного (накопленного) ресурса не превосходит величины $\theta<A$. В противном случае выигрыш игрока i вычисляется с помощью функции $g_i(x_1,...,x_n)$, причем $g_i(x_1,...,x_n)<h_i(x_1,...,x_n)$. Таким образом, построена игра в нормальной форме:

$$\Gamma_N=\langle N;X_1,...,X_i,...,X_n;K_1,...,K_i,...,K_n\rangle,$$

где $N=\{1,2,...,n\}$ – множество игроков (потребителей),

$$K_i(x_1,...,x_n)=\begin{cases} h_i(x_1,...,x_n), \sum_{i=1}^{n} x_i \le \theta \\ g_i(x_1,...,x_n), \sum_{i=1}^{n} x_i > \theta \end{cases},$$

$X_i=[0,a_i],0\le a_i\le A$.

Пример 3. Игра «Задача о продавцах газет».

Впервые эта задача была исследована в работе [Parlar, 1988] и была одной из первых работ, в которой теоретико-игровой подход был использован в задачах управления запасами.

Рассмотрим игру двух лиц, в которой игроками являются продавцы газет (розничная торговля). Обозначим игроков индексами i и j. Стратегией каждого игрока является размер заказа газет: $X_i=X_j=[0,+\infty)$. Предположим, что оба игрока реализуют одинаковый продукт, в результате чего, если игрок i реализует весь свой запас, то покупатели покупают товар у продавца j. В результате, суммарный спрос для игрока i имеет вид:

$$D_i+(D_j-x_j)^+,\ x_j\in X_j.$$

Следовательно, функция выигрыша игрока i принимает вид:

$$\Pi_i(x_i,x_j)=E_D[P\min(D_i+(D_j-x_j)^+,x_i)-c_ix_i],\ i=1,2.$$

Таким образом, построена игра в нормальной форме

$$\Gamma=\left\langle X_i,X_j,K_i,K_j\right\rangle.$$

2. ПРИНЦИПЫ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ИГРЫ В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

В соответствии с определением функции выигрыша $K_i(x_1,...,x_n)$, которая задана на всех возможных ситуациях (а значит, зависит не только от действий игрока i, но и от стратегий других игроков), важным является вопрос о том, какое поведение игроков следует считать оптимальным? Именно в этом заключается, возможно, наиболее важная и сложная проблема теории игр, – выяснить, что понимать под *решением игры*. При этом различные понятия решения игры будут соответствовать различным способам «оптимального» поведения игроков, т.е. будут отвечать различным принципам оптимальности.

Определение 2. *Под принципом оптимальности (или решением)* s*, заданным на классе (подклассе) игр* $\Gamma_N=\left\langle N,\{X_i\}_{i=1}^n,\{K_i\}_{i=1}^n\right\rangle$ *в нормальной форме понимают функцию, ставящую в соответствие каждой игре* Γ_N *этого класса определенное подмножество* $s(\Gamma_N)$*, из множества* X_N *всех ситуаций в игре, т.е.* $s(\Gamma_N)\subset X_N$.

2.1 Сильное равновесие

Наиболее распространенным принципом оптимального поведения или принципом оптимальности считается выбор в качестве наилучшей некоторой ситуации равновесия по Нэшу, которая так названа в честь Джона Нэша, сформулировавшего указанный принцип оптимальности в 1951 году. Этот принцип определяет в качестве оптимальных такие ситуации, для которых любые индивидуальные отклонения игроков от входящих в эту ситуацию стратегий, не могут увеличить выигрыша отклонившегося игрока при условии, что все остальные игроки придерживаются зафиксированных в этой ситуации стратегий. Математически это условие выражается следующим образом.

Определение 3. *Ситуация* $x_N^* = (x_1^*, \cdots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^* \cdots, x_n^*) \in X_N$ *в игре* Γ_N *называется равновесием по Нэшу, если для каждого игрока* i *и любой стратегии* $x_i \in X_i$ *этого игрока выполняется неравенство*

$$K_i(x_1^*, \cdots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^* \cdots, x_n^*) \geq K_i(x_1^*, \cdots x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^* \cdots, x_n^*).$$

Заметим, что в обозначениях условие определения 3 можно представить в следующем виде:

$$K_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq K_i(x_i, x_{-i}^*).$$

Множество всех ситуаций равновесия по Нэшу будем обозначать $NE(\Gamma_N)$. В соответствии с определением 3 множество $NE(\Gamma_N)$ реализует определенный принцип оптимальности (а именно, *принцип равновесия по Нэшу*) для игры в нормальной форме.

Рассмотрим еще один принцип оптимальности в игре в нормальной форме. Обозначим через $S \subseteq N$ произвольную коалицию в игре Γ_N. Множество стратегий X_S коалиции S определяется как декартово произведение стратегий игроков, входящих в коалицию S:

$$X_S = \prod_{i \in S} X_i.$$

Множество стратегий дополнительной коалиции $N \setminus S$ обозначим через $X_{N \setminus S} = \prod_{i \in N \setminus S} X_i$.

Следующее определение основано на концепции, предложенной Р. Ауманом [Aumann, 1959].

Определение 4. *Ситуация* $x_N^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ *называется сильным равновесием* SE_1 *в игре* Γ_N *если для каждой коалиции* $M \subseteq N$, *и стратегии коалиции* $x_M \in X_M$ *следующие неравенства не выполнены*:

$$\begin{cases} K_i(x_M, x_{-M}^*) \geq K_i(x_N^*), \ \text{для всех} \ i \in M, \\ \text{существует} \ i_0 \in M, \ K_{i_0}(x_M, x_{-M}^*) > K_{i_0}(x^*). \end{cases}$$

Пусть K_S есть функция выигрыша коалиции S, где:

$$K_S(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i\in S}K_i(x_1,\ldots,x_n).$$

Определение 5. *Ситуация* $x_N^*=(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)$ *называется сильным равновесием* SE_2 *в игре* Γ_N *если для каждой коалиции* $S\subseteq N$ *и любой стратегии* $x_S\in X_S$ *выполнены следующие неравенства*:

$$K_S(x_S^*,x_{-S}^*)\geq K_S(x_S,x_{-S}^*)\,.$$

Определение 6. *Ситуация* $x_N^*=(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)$ *называется сильным равновесием* SE_3 *в игре* Γ_N *если для каждой коалиции* $S\subseteq N$ *и любой стратегии* $x_S\in X_S$, $x_S\neq x_S^*$ *существует такой игрок* $i_0\in S$, *что выполнено следующее неравенство*:

$$K_{i_0}(x_N^*)=K_{i_0}(x_S^*,x_{-S}^*)>K_{i_0}(x_S,x_{-S}^*)\,.$$

Определения 5 и 6 основаны на концепции, предложенной Л.А. Петросяном [Петросян, Зенкевич, Семина, 1998; Petrosyan, Grauer, 2002; Зенкевич, Петросян, Янг, 2009].

Необходимо отметить, что SE_1, SE_2 и SE_3 являются равновесием по Нэшу и парето-оптимальным решением одновременно. Множество сильных равновесий в игре Γ_N в смысле определений 4 – 6 будем обозначать $SE_1(\Gamma_N)$, $SE_2(\Gamma_N)$ и $SE_3(\Gamma_N)$ соответственно.

Для дальнейшего анализа сильных равновесий в играх в нормальной форме необходимо рассмотреть еще одну форму записи определения 3. Пусть задан вектор:

$$\lambda^{[n,i]}=\left(\lambda_1^{[n,i]},\ldots,\lambda_i^{[n,i]},\ldots,\lambda_n^{[n,i]}\right)\in E^n,$$

где $\lambda_j^{[n,i]}=0$, $j\neq i$, $\lambda_i^{[n,i]}=1$.

Определение 6*. *Ситуация* $x_N^*=(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)$ *называется сильным равновесием* SE_3 *в игре* Γ_N *если для каждой коалиции* $S\subseteq N$ *и любой стратегии коалиции* $x_S\in X_S$, $x_S\neq x_S^*$ *существует такой игрок* $i_0^S\in S$, *для которого имеет место следующее неравенство*:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{[n,i_0^S]}K_i(x_S^*,x_{-S}^*)>\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{[n,i_0^S]}K_i(x_S,x_{-S}^*)\,.$$

Следующие результаты показывают взаимосвязь между множествами $SE_1(\Gamma_N)$, $SE_2(\Gamma_N)$ и $SE_3(\Gamma_N)$.

Лемма 1. *Для каждой игры в нормальной форме* Γ_N *имеет место следующее включение*:

$$SE_2(\Gamma_N) \subset SE_1(\Gamma_N).$$

Доказательство можно найти в [Zenkevich, Zyatchin, 2011].

Лемма 2. *Для каждой игры в нормальной форме* Γ_N *имеет место следующее включение:*

$$SE_3(\Gamma_N) \subset SE_1(\Gamma_N).$$

Пересечение множеств $SE_2(\Gamma_N)$ и $SE_3(\Gamma_N)$ может оказаться пустым.

Пример 4. Рассмотрим биматричную игру $\Gamma_2(A,B)$ с матрицей:

$$\begin{pmatrix} (0,0) & (1,8) \\ (0,10) & (0,0) \end{pmatrix}.$$

В соответствии с определениями 4 – 6* имеем:

$$SE_1(\Gamma_2) = NE(\Gamma_2) = \{(1,2),(2,1)\},$$

$$SE_2(\Gamma_2) = (2,1),$$

$$SE_3(\Gamma_2) = (1,2).$$

Очевидно, $SE_2(\Gamma_2) \subset SE_1(\Gamma_2)$ и $SE_3(\Gamma_2) \subset SE_1(\Gamma_2)$, но $SE_2(\Gamma_2) \cap SE_3(\Gamma_2) = \varnothing$.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА

Дифференциальные игры являются расширением понятия одношаговой игры на случай, когда игроки принимают решение непрерывно в течение определенного промежутка времени. Поскольку во многих моделях, которые строятся для задач управления цепями поставок, предполагается непрерывный процесс принятия решения всеми участниками, дифференциальные игры находят здесь широкое применение.

В зависимости от заданного промежутка времени, дифференциальные игры делятся на игры конечной и бесконечной продолжительности. Если в дифференциальной игре динамика не зависит от случайных факторов, то игр называется детерминированной. В противном случае, игра является стохастической [Basar, Olsder, 1995].

3.1 Определение дифференциальной игры.

Определим дифференциальную игру $\Gamma(x_0, T-t_0)$ из начального состояния x_0 и конечной продолжительности $T-t_0$. Здесь $t_0 \geq 0$, $T \geq t_0$ – моменты начала и окончания игры соответственно [Зенкевич, Петросян, Янг, 2009]. Множество игроков в игре $\Gamma(x_0, T-t_0)$ обозначим через $N = \{1, \ldots, i, \ldots n\}$.

Предположим, что динамика изменения состояния игры $\Gamma(x_0, T-t_0)$ имеет вид:

$$\dot{x}(t) = f\left[t, x(t), u_1(t), \ldots, u_n(t)\right],\ x(t_0) = x_0,$$

где $x(t) \in R$, x_0 – известное начальное состояние игры, $u_i(t)$ – управление игрока $i \in N$ в момент времени t. Здесь $u_i(t) \in U_i \subset R$, $\prod_{i \in N} U_i = U_N \subset R^n$. Предположим, что функция $f\left[t, x(t), u_1(t), \ldots, u_n(t)\right]$ – непрерывно дифференцируемая на $[t_0, T] \times R \times U_N$.

Для каждого игрока $i \in N$ рассмотрим интегральный функционал с терминальным выигрышем вида:

$$J_i(x_0, u_1(\cdot), u_2(\cdot), \ldots u_n(\cdot)) =$$

$$= \int_{t_0}^{T} g_i\left[t, x(t), u_1(t), u_2(t), \ldots u_n(t)\right] dt + q_i\left[x(T)\right],$$

где $u_i(\cdot)$ представляет собой непрерывную функцию $u_i(t)$, $t \in [t_0, T]$. Будем предполагать, что функции $g_i\left[t, x(t), u_1(t), \ldots, u_n(t)\right]$ и $q_i\left[x(T)\right]$ являются дифференцируемыми в области определения. Предполагается, что игрок $i \in N$ стремится максимизировать значение функционала $J_i(x_0, u_1(\cdot), \ldots, u_i(\cdot), \ldots, u_n(\cdot))$ по $u_i(\cdot)$.

Рассмотрим дифференциальную игру бесконечной продолжительности $\Gamma(x_0)$. Будем считать, что игрок $i \in N$ стремиться максимизировать функцию выигрыша следующего вида:

$$J_i(x_0, u_1(\cdot), u_2(\cdot), \ldots u_n(\cdot)) = \int_0^{\infty} e^{-rt} g_i[x(t), u_1(t), \ldots, u_n(t)]dt,$$

при ограничении

$$\dot{x}(t) = f\left[x(t), u_1(t), \ldots, u_n(t)\right],\ x(0) = x_0,$$

где r – параметр дисконтирования. Дифференциальная игра $\Gamma(x_0)$, заданная на бесконечном промежутке не зависит от выбора начального момента, а зависит лишь от состояния x в момент начала игры.

3.2. Примеры постановок дифференциальных игр.

Пример 5. Рассмотрим игру двух лиц, в которой игроки производят и реализуют одинаковый продукт [Kamien, Schwartz, 2000]. Каждый игрок в каждый момент времени выбирает объем производства, получая при этом суммарные затраты на уровне:

$$C_i(u_i) = cu_i + \frac{u_i^2}{2}.$$

Пусть изменение рыночной цены продукта определяется уравнением:

$$dp(s) = s[a - u_1(s) - u_2(s) - p(s)]ds,\ p(0) = p_0,$$

где s – коэффициент, характеризующий скорость изменения цены. Функция выигрыша каждого игрока определяется в виде:

$$\int_0^{\infty} e^{-rt}[P(s)u_i(s) - C_i(u_i(s))]ds,\ i = 1,2.$$

Пример 6. «Конкурентная реклама с двумя участниками» [Sorger, 1989].

На рынок выходят две фирмы. Функция прибыли первой и второй фирмы имеют соответственно вид:

$$\int_0^T e^{-rs}[q_1 x(s) - c_1 u_1^2(s)]ds + e^{-rT} S_1 x(T)$$

и

$$\int_0^T e^{-rs}[q_2(1 - x(s)) - c_2 u_2^2(s)]ds + e^{-rT} S_2(1 - x(T)),$$

где r, q_i, c_i, S_i, $i = 1,2$ – положительные постоянные, $x(s)$ – доля рынка фирмы 1 в момент s, $(1 - x(s))$ – доля рынка фирмы 2, $u_i(s)$ – вложения в рекламу фирмы $i = 1,2$.

Предполагается, что емкость рынка не меняется со временем. Единственным рыночным инструментом, которым пользуются фирмы, является реклама. Вложения в рекламу влияют на динамику доли рынка каждой фирмы. Динамика доли рынка первой фирмы определяется следующим дифференциальным уравнением:

$$dx(s) = (u_1(s)[1 - x(s)]^{\frac{1}{2}} - u_2(s)[x(s)]^{\frac{1}{2}})ds$$

3.3 Сильное равновесие в дифференциальной игре.

Пусть $S \subseteq N$ – произвольная коалиция в игре конечной продолжительности $\Gamma(x_0, T - t_0)$. Обозначим через $u_S(\cdot) = \{u_i(\cdot)\}_{i \in S}$ стратегию коалиции S. Стратегию дополнительной коалиции $N \setminus S$ будем обозначать через $u_{N \setminus S}(\cdot)$ или $u_{-S}(\cdot)$.

Сформулируем определения 4 – 6* для дифференциальной игры $\Gamma(x_0, T - t_0)$.

Определение 7. *Ситуация* $u_N^*(\cdot) = (u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot), \ldots, u_n^*(\cdot))$ *является сильным равновесием* SE_1 *в дифференциальной игре* $\Gamma(x_0, T - t_0)$ *если для каждой коалиции* $M \subseteq N$ *и любой стратегии коалиции* $u_M(\cdot)$ *следующие условия не выполнены*:

для всех $i \in M$

$$J_i(x_0,u_M(\cdot),u^*_{-M}(\cdot))=\int_{t_0}^{T} g_i\left[t,x^{[M]}(t),u_M(t),u^*_{-M}(t)\right]dt+q_i\left[x^{[M]}(T)\right]\geq$$

$$\geq\int_{t_0}^{T} g_i\left[t,x^*(t),u^*_M(t),u^*_{-M}(t)\right]dt+q_i\left[x^*(T)\right]=J_i(x_0,u^*_M(t),u^*_{-M}(t)),$$

и существует игрок $i_0\in M$ такой, что:

$$J_{i_0}(x_0,u_M(\cdot),u^*_{-M}(\cdot))=$$

$$=\int_{t_0}^{T} g_{i_0}\left[t,x^{[M]}(t),u_M(t),u^*_{-M}(t)\right]dt+q_{i_0}\left[x^{[M]}(T)\right]>$$

$$>\int_{t_0}^{T} g_{i_0}\left[t,x^*(t),u^*_M(t),u^*_{-M}(t)\right]dt+q_{i_0}\left[x^*(T)\right]=$$

$$=J_{i_0}(x_0,u^*_M(\cdot),u^*_{-M}(\cdot))=J_{i_0}(x_0,u^*(\cdot)),$$

где

$$\dot{x}^{[M]}(t)=f\left[t,x^{[M]}(t),u_M(t),u^*_{-M}(t)\right],\quad x^{[M]}(t_0)=x_0,$$

$$\dot{x}^*(t)=f\left[t,x^*(t),u^*_1(t),\dots,u^*_n(t)\right],\quad x^*(t_0)=x_0.$$

Рассмотрим следующие обозначения:

$$g_S\left[t,x,u_N(t)\right]=\sum_{i\in S} g_i\left[t,x(t),u_N(t)\right],$$

$$q_S\left[x(t)\right]=\sum_{i\in S} q_i\left[x(t)\right].$$

Определение 8. *Ситуация является сильным равновесием в дифференциальной игре* $\Gamma(x_0,T-t_0)$ *если следующие неравенства имеют место для любой коалиции* $S\subseteq N$ *и любой стратегии* $u_S(\cdot)$:

$$J_S(x_0,u_N^*(\cdot))=$$

$$=\int_{t_0}^{T} g_S\left[t,x^*(t),u_S^*(t),u_{-S}^*(t)\right]dt+q_S\left[x^*(T)\right]\geq$$

$$\geq\int_{t_0}^{T} g_S\left[t,x^{[S]}(t),u_S(t),u_{-S}^*(t)\right]dt+q_S\left[x^{[S]}(T)\right]=$$

$$=J_S(x_0,u_S(\cdot),u_{-S}^*(\cdot)),$$

где

$$\dot{x}^{[S]}(t)=f\left[t,x^{[S]}(t),u_S(t),u_{-S}^*(t)\right],\quad x^{[S]}(t_0)=x_0,$$

$$\dot{x}^*(t)=f\left[t,x^*(t),u_1^*(t),\ldots,u_n^*(t)\right],\quad x^*(t_0)=x_0.$$

В дальнейшем будем использовать следующую форму условия из определения 8:

$$J_S\left[x_0,u^*(\cdot)\right]\geq J_S\left[x_0,u_S(\cdot),u_{-S}^*(\cdot)\right],$$

$$\dot{x}^{[S]}(t)=f\left[t,x^{[S]}(t),u_S(t),u_{-S}^*(t)\right],\quad x^{[S]}(t_0)=x_0,$$

$$\dot{x}^*(t)=f\left[t,x^*(t),u^*(t)\right],\quad x^*(t_0)=x_0,$$

$$\forall S\subset N,\quad S\neq\varnothing,\quad \forall u_S(\cdot).$$

Определение 9. *Набор стратегий является сильным равновесием SE_3 в дифференциальной игре $\Gamma(x_0,T-t_0)$ если для любой $S\subseteq N$ и любой стратегии $u_S(\cdot)\neq u_S^*(\cdot)$ существует игрок $i_0\in S$, такой, что имеет место следующее неравенство*:

$$J_{i_0}(x_0,u_S^*(\cdot),u_{-S}^*(\cdot))=\int_{t_0}^{T} g_{i_0}\left[t,x^*(t),u_S^*(t),u_{-S}^*(t)\right]dt+q_{i_0}\left[x^*(T)\right]>$$

$$> \int_{t_0}^{T} g_{i_0}\left[t, x^{[S]}(t), u_S(t), u_{-S}(t)\right]dt + q_{i_0}\left[x^{[S]}(T)\right] = J_{i_0}(x_0, u_S(\cdot), u^*_{-S}(\cdot)).$$

Как и для определения 6^* рассмотрим другую форму записи определения 6.

Определение 9*. *Набор стратегий является сильным равновесием* SE_3 *в дифференциальной игре* $\Gamma(x_0, T-t_0)$ *если для любой коалиции* $S \subseteq N$ *и любой стратегии* $u_S(\cdot)$, $u_S(\cdot) \neq u^*_S(\cdot)$ *существует игрок* $i_0^S \in S$, *такой, что имеет место следующее неравенство*:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n,i_0^S]} J_{i_0}(x_0, u^*_S(\cdot), u^*_{-S}(\cdot)) > \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n,i_0^S]} J_{i_0}(x_0, u_S(\cdot), u^*_{-S}(\cdot)).$$

Очевидно, лемма 1 и лемма 2 справедливы для дифференциальной игры конечной и бесконечной продолжительности. Аналогично определениям 7 – 9^* понятие сильного равновесия SE_1, SE_2 и SE_3 формулируется для дифференциальных игр бесконечной продолжительности.

Следующая теорема определяет достаточные условия существования сильного равновесия SE_3 в дифференциальной игре $\Gamma(x_0, T-t_0)$ конечной продолжительности.

Теорема 1. *Если для любой коалиции* $S \subseteq N$, $S \neq \varnothing$ *в дифференциальной игре* $\Gamma(x_0, T-t_0)$ *существует номер* $i_0^S \in S$ *и непрерывно-дифференцируемое на* $[0,T] \times R$ *решение системы дифференциальных уравнений*

$$V_t^{[S]}(t,x) + \max_{u_S}\Big\{ f\left[t, x, u_S(t), \varphi^*_{-S}(t,x)\right] V_x^{[S]}(t,x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{[n,i_0^S]} g_i\left[t, x, u_S(t), \varphi^*_{-S}(t,x)\right]\Big\} =$$

$$= V_t^{[S]}(t,x) + f\left[t, x, \varphi^*_S(t,x), \varphi^*_{-S}(t,x)\right] V_x^{[S]}(t,x) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{[n,i_0^S]}g_i\left[t,x,\varphi_S^*(t,x),\varphi_{-S}^*(t,x)\right]=0,$$

$$V^{[S]}(T,x^{[S]}(T))=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{\left[n,i_0^S\right]}q_i\left[x^{[S]}(T)\right],$$

где для всех коалиций $S\subseteq N$ максимум в левой части достигается на единственном наборе

$$\left\{\varphi_i^*\left(t,x(t)\right)\in U_i, i\in N, t\in[t_0,T]\right\},$$

и $\varphi_i^*\left(t,x(t)\right)\in U_i$, $i\in N$ являются непрерывными на $[t_0,T]\times R$ функциями, тогда набор $\left\{u_i^*(t)=\varphi_i^*\left(t,x(t)\right)\in U_i, i\in N, t\in[t_0,T]\right\}$ является сильным равновесием SE_3 в дифференциальной игре $\Gamma(x_0,T-t_0)$.

Следующая теорема определяет достаточные условия существования сильного равновесия SE_3 в дифференциальной игре $\Gamma(x)$ бесконечной продолжительности.

Теорема 2. *Если для любой коалиции $S\subseteq N$, $S\neq\varnothing$ в дифференциальной игре $\Gamma(x)$ существует номер $i_0^S\in S$ и непрерывно-дифференцируемое на $[0,T]\times R$ решение системы дифференциальных уравнений*

$$rV^{[S]}(x)+\max_{u_S}\left\{f\left[x,u_S(t),\varphi_{-S}^*(x)\right]V_x^{[S]}(x)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{[n,i_0^S]}g_i\left[x,u_S(t),\varphi_{-S}^*(x)\right]\right\}=$$

$$=rV^{[S]}(x)+f\left[x,\varphi_S^*(x),\varphi_{-S}^*(x)\right]V_x^{[S]}(x)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{[n,i_0^S]}g_i\left[x,\varphi_S^*(x),\varphi_{-S}^*(x)\right]=0$$

где для всех коалиций $S\subseteq N$ максимум в левой части достигается на единственном наборе

$$\left\{\varphi_i^*(x) \in U_i, i \in N\right\},$$

и $\varphi_i^*(x) \in U_i$, $i \in N$ являются непрерывными на $[t_0,T] \times R$ функциями, тогда набор $\left\{\varphi_i^*(x) \in U_i, i \in N\right\}$ является сильным равновесием SE_3 в дифференциальной игре $\Gamma(x)$.

3.4. Пример применения техники поиска сильного равновесия в дифференциальной игре конечной продолжительности.

Проиллюстрируем применение теоремы на примере, предварительно исследовав свойства уравнения в частных производных следующего вида:

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \eta_1 \left(\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} \right)^2 + \eta_2 \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} x + ae^{bt} \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} + r(t) = 0,$$

$$V(T,x) = \eta_3 x,$$

где a, b, η_1, η_2, η_3 – заданные параметры, $b \neq \eta_2$, $r(t)$ – непрерывно-дифференцируемая функция на отрезке $[t_0,T]$.

Лемма 3. *Уравнение (3.1) имеет на отрезке* $[t_0,T]$ *единственное решение* $V(t,x)$, *причем* $\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}$ *не зависит от* a, b, η_1, $r(t)$ *и имеет вид:*

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} = \eta_3 e^{\eta_2 (T-t)}.$$

Пример 7. Рассмотрим игру $\Gamma(x_0, T-t_0)$, где $N = \{1,2,3\}$, $n = 3$. Динамика состояний имеет вид:

$$\dot{x}(t) = x + 2u_1 + 4u_2 + 6u_3, \quad x(t_0) = x_0.$$

Пусть выигрыш игрока 1, 2 и 3 имеет соответственно вид:

$$J_{\{1\}}[x_0, u_1, u_2, u_3] =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \left[-u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + 2u_1 x + 4u_2 x - 2u_3 x - 6x^2 + r^{[1]}(t) \right] dt + x(T),$$

$$J_{\{2\}}[x_0, u_1, u_2, u_3] =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \left[u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - 2e^{5(T-t)} x + 4u_2 x - 2u_3 x - 6x^2 + r^{[2]}(t) \right] dt + x(T),$$

$$J_{\{3\}}[x_0, u_1, u_2, u_3] =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \left[-u_1^2 + u_2^2 - 2u_3^2 - 6e^{5(T-t)} x - 4u_3 x - 5x^2 + r^{[3]}(t) \right] dt + 2x(T),$$

где $r^{[1]}(t)$, $r^{[2]}(t)$, $r^{[3]}(t)$, $t \in [t_0, T]$ – непрерывно-дифференцируемые функции.

Применяя результат леммы 3 в рассматриваемой игре, найдено сильное равновесие SE_3 [Zenkevich, Zyatchin, 2011]. Схема построения сильного равновесия состоит в следующем.

В соответствии с теоремой 1 для каждой коалиции $S \subseteq N$, $S \neq 0$ необходимо найти такой номер $i_0^S \in S$ и непрерывно-дифференцируемую функцию $V^{[S]}(t,x)$, что соответствующая система уравнений имеет единственное решение.

Для коалиции $N = \{1,2,3\}$ рассмотрим вектор

$$\lambda^{[n,i_0^N]} = \left(\lambda_1^{[n,i_0^N]}, \lambda_2^{[n,i_0^N]}, \lambda_3^{[n,i_0^N]} \right) = (1,0,0),$$

тогда решение системы уравнений из условия теоремы 1 имеет вид:

$$\varphi_1^{123}(t,x) = e^{5(T-t)} + x,$$

$$\varphi_2^{123}(t,x) = 2e^{5(T-t)} + 2x,$$

$$\varphi_3^{123}(t,x) = 3e^{5(T-t)} - x.$$

Рассмотрим коалицию $S = \{1,2\}$. Предположим, что игрок 3 использует стратегию

$$\varphi_3^{123}(t,x) = 3e^{5(T-t)} - x.$$

Пусть $\lambda^{[n,i_0^{1,2}]} = \left(\lambda_1^{[n,i_0^{1,2}]}, \lambda_2^{[n,i_0^{1,2}]}, \lambda_3^{[n,i_0^{1,2}]}\right) = (1,0,0)$.

Решая систему уравнений из условия теоремы 1, имеем:

$$\varphi_1^{12}(t,x) = e^{5(T-t)} + x,$$

$$\varphi_2^{12}(t,x) = 2e^{5(T-t)} + 2x.$$

Оставшиеся случаи двухэлементных коалиций рассматриваются аналогично. Для коалиции $S = \{1,3\}$ рассматривается вектор:

$$\lambda^{[n,i_0^S]} = \left(\lambda_1^{[n,i_0^S]}, \lambda_2^{[n,i_0^S]}, \lambda_3^{[n,i_0^S]}\right) = (1,0,0),$$

а для коалиции $S = \{2,3\}$ – вектор:

$$\lambda^{[n,i_0^S]} = \left(\lambda_1^{[n,i_0^S]}, \lambda_2^{[n,i_0^S]}, \lambda_3^{[n,i_0^S]}\right) = (0,1,0).$$

Рассмотрим одноэлементную коалицию $S = \{1\}$ и вектор:

$$\lambda^{[n,i_0^S]} = \left(\lambda_1^{[n,i_0^S]}, \lambda_2^{[n,i_0^S]}, \lambda_3^{[n,i_0^S]}\right),$$

при условии, что игрок 2 использует стратегию

$$\varphi_2^{123}(t,x) = 2e^{5(T-t)} + 2x,$$

а игрок 3 – стратегию

$$\varphi_3^{123}(t,x) = 3e^{5(T-t)} - x.$$

Пусть $\lambda^{[n,i_0^S]} = \left(\lambda_1^{[n,i_0^S]}, \lambda_2^{[n,i_0^S]}, \lambda_3^{[n,i_0^S]}\right) = (1,0,0)$, тогда:

$$\varphi_1^1(t,x) = e^{5(T-t)} + x\,.$$

Оставшиеся случаи одноэлементных коалиций рассматриваются аналогично. Для $S=\{2\}$ рассматривается вектор:

$$\lambda^{[n,i_0^S]} = \left(\lambda_1^{[n,i_0^S]}, \lambda_2^{[n,i_0^S]}, \lambda_3^{[n,i_0^S]}\right) = (0,1,0)\,,$$

а для коалиции $S=\{3\}$ – вектор:

$$\lambda^{[n,i_0^S]} = \left(\lambda_1^{[n,i_0^S]}, \lambda_2^{[n,i_0^S]}, \lambda_3^{[n,i_0^S]}\right) = (0,0,1)\,.$$

Для всех коалиций и выбранных векторов динамика состояний принимает вид:

$$\dot{x}(t) = 5x + 28e^{5(T-t)}\,,\ x(t_0) = x_0\,.$$

В результате показано, для ситуации

$$\varphi^{123}(t,x) = \left(e^{5(T-t)} + x, 2e^{5(T-t)} + 2x, 3e^{5(T-t)} - x\right)$$

существуют номера $i_0^N = 1$, $i_0^{\{1,2\}} = 1$, $i_0^{\{1,3\}} = 1$, $i_0^{\{2,3\}} = 2$, $i_0^{\{1\}} = 1$, $i_0^{\{2\}} = 2$, $i_0^{\{3\}} = 3$ такие, что для всех коалиций выполняются условия теоремы 1, следовательно $\varphi^{123}(t,x)$ является сильным равновесием SE_3 в дифференциальной игре примера 3.

По лемме 2 сильное равновесие SE_1 в рассматриваемой игре не пусто и $\varphi^{123}(t,x)$ также является сильным равновесием в смысле SE_1.

ВЫВОДЫ

В работе предложены достаточные условия существования позиционного сильного равновесия в детерминированных дифференциальных играх конечной и бесконечной продолжительности. При формализации оценки качества стратегии коалиции для позиционного сильного равновесия в широком смысле разработана специальная техника, основанная на скаляризации векторного критерия, компонентами которого являются функции выигрышей игроков, входящих в коалицию. Это позволило применить метод динамического программирования при формулировке и обосновании достаточных условий существования сильного равновесия.

Достаточные условия существования позиционного сильного равновесия получены в конструктивном виде, что позволяет говорить о новой технике построения сильного равновесия. Применение техники проиллюстрировано на примере решения дифференциальной игры трех лиц. Разработанная техника при дальнейшем развитии может быть использована для построения сильных равновесий в более широких классах дифференциальных игр. Практическая ценность работы следует из практических направлений применения результатов из области динамических игр, например, формирования долгосрочных соглашений, защиты окружающей среды, совместной разработки недр, научно-исследовательских разработок, моделей управления цепями поставок [Cachon, Zipkin,1999; Bernstein F, Federgruen, 2004; Cachon, 2005], в экономике и менеджменте.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вайсборд Э.М., Жуковский В.И.* Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения. М.: Советское радио, 1980.
2. *Зенкевич Н.А., Зятчин А.В.* Построение сильного равновесия в дифференциальной игре многих лиц // Управление большими системами. Специальный выпуск 31.1 "Математическая теория игр и ее приложения". — М.: ИПУ РАН, — 2010. — С. 51–77.
3. *Зенкевич Н.А., Зятчин А.В.* Модель олигополии при экологических ограничениях с позиций корпоративной социальной ответственности // Вестник СПбГУ, сер. 8, вып. 1 — 2009a. — С. 33–62.
4. *Зенкевич Н.А., Зятчин А.В.* Сильное равновесие в дифференциальной игре со стохастической динамикой // Вестник СПбГУ, сер. 10, вып. 4 — 2009b — С. 84–94.
5. *Зенкевич Н.А., Петросян Л.А., Янг Д.В.К.* Динамические игры и их приложения в менеджменте. — Санкт-Петербург: Высшая школа менеджмента, 2009.
6. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики. / Пер. с франц. О.Р. Меньшиковой, И.С. Меньшикова. — Москва: Мир, 1985.
7. *Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А.* Теория игр. — М.: Высш. шк., Книжный дом "Университет", 1998.
8. *Чистяков С.В.* О построении сильно динамически устойчивых решений кооперативных дифференциальных игр // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета. Сер.1: Математика, механика, астрономия. Вып. 1. — 1992 — С. 57–

69.
9. *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. / пер. с англ. М. Г. Бутрим, П. К. Катышева; под ред. А. Н. Ширяева. — М.: Мир, 1978.
10. *Aumann R.J.* Acceptable Points in General Cooperative n - Person Games. // Contributions to the Theory of Games IV. Annals of Mathematics Study 40, ed. by A.W. Tucker, Princeton NJ: Princeton University Press. — 1959. — P. 287–324.
11. *Basar T.* Informationally nonunique equilibrium solutions in differential games // SIAM Journal of Control and Optimization, Vol.15. — 1977b. — P. 636–660.
12. *Basar T., Olsder G. J.* Dynamic Noncooperative Game Theory, 2nd Edn., — London: Academic Press,1995.
13. *Bernstein F, Federgruen A.* Dynamic inventory and pricing models for competing retailers // Naval Research Logistics Vol. 51, Issue 2. — 2004. — P. 258–274
14. *Cachon G.P.* Supply chain coordination with revenue-sharing contracts: strengths and limitations //Management science. — 2005 — Vol.51, no. 1. — P. 30–44.
15. *Cachon G.P., Zipkin P. H.* Competitive and cooperative inventory policies in a two-stage supply chain // Management science. – 1999 – Vol.45, no. 7. – P. 936–953.
16. *Isaacs R.* Differential games. — New York, London, Sydney: John Wiley and sons Inc, 1965.
17. *Kamien, M.I., Schwartz N.L.* Dynamic optimization: the calculus of variations and optimal control in economics and management. — North-Holland, 2000.
18. Parlar, M. Game theoretic analysis of the substitutable product inventory problem with random demands // Naval Research Logistics, Vol.35, — P. 397-409.
19. *Petrosyan L.A., Grauer L.V.* Strong Nash Equilibrium in Multistage Games // International Game Theory Review, Vol. 4, №3. — 2002. — P. 255–264.
20. *Sorger G.* Competitive dynamic advertising: a modification of the case game // Journal of Economic Dynamics and Control, Vol. 13. — 1989. — P. 55–80.
21. *Von Neumann J., Morgenstern O.* The Theory of Games and Economic Behavior, — Princeton University Press, Princeton, 1944.
22. *Yeung D.W.K., Petrosyan L.A.* Cooperative stochastic differential games. — New York: Springer Verlag, 2006.

23. *Zenkevich N.A., Zyatchin A.V.* Strong Equilibrium Technique in Differential Games// Game Theory and Applications, Vol. 15, ISBN 978-1-61470-187-3, Nova Science Publishers, — New York, 2011. – в печати.
24. *Zenkevich N.A., Zyatchin A.V.* Oligopoly Competition under Environmental Design // Game Theory and Applications, Vol. 12, — New York: Nova Science Publishers. — 2007. P. 193–206

EXECUTIVE SUMMARY

The theory of dynamic and differential games as the field of mathematical game theory is being developed. It appeared as an independent scientific discipline since the publication of the book of von Neumann and Morgenstern O. "Game Theory and economic behavior". Formation of Russian schools of game theory is primarily associated with the names of N.N. Vorobyov and J.B. Germeyer.

The relevance of theoretical and practical results, obtained in the field of dynamic games, is based on realistic models, which are investigated. The main property of dynamic and differential games is possibility to describe many classes of controlled systems, which evaluate in time. In particular, we study a class of differential games of a conflict-controlled processes in which a change in game state is described by a system of differential equations for a given time interval duration

The class of strategies, in which we seek a solution for the differential game, depends on assumptions about the informational structure of the conflict process. Consider two classes of strategies: open-loop and closed-loop.

Open-loop strategies depend on the initial state and are functions of time. A solution in open-loop strategies was investigated, for example, in [Вайсборд, Жуковский, 1980].

Closed-loop strategies depend on time and the current game state [Зенкевич, Петросян, Янг, 2006]. For the first time the problem of constructing a closed-loop equilibrium in a differential game studied in [Basar, 1977]. Later the problem of coincidence of the sets of equilibria in the open-loop and closed loop strategies was studied.

In the theory of differential games and its applications it is an important issue to find strong closed-loop equilibrium. Currently, there are several definitions of a strong equilibrium [Мулен, 1958; Aumann, 1959; , Petrosyan, Grauer 2002]. This work, in particular, strong equilibria were studied in a wide [Мулен, 1958] and narrow [Petrosyan, Grauer 2002] sense. In each case, a strong equilibrium is a situation, which is stable against deviations of any coalition of players.

This principle of optimality is investigated for classes of games in normal (strategic) and extensive forms (see, eg, [Мулен, 1958; Петросян, Зенкевич, Семина, 1998; Зенкевич, Петросян, Янг, 2006]). The main property of a strong equilibrium is that it is both a Nash equilibrium and Pareto-optimal solution, i.e. it satisfies the properties of cooperative and individual rationality [Чистяков,1992; Зенкевич, Петросян, Янг, 2006]. The main drawback of the concept of strong equilibrium is that it is extremely rare exists even in a class of two-person games [Мулен, 1958; Zenkevich, Zyatchin, 2007].

In the theory of dynamic and differential games strong equilibrium is sometimes found using folk theorem. It allows constructing a solution in the class of punishment strategy [Петросян, Зенкевич, Семина, 1998; Зенкевич, Петросян, Янг, 2006].

The disadvantage of this approach is necessity for agreement of all the players to apply it, and the availability of sufficient strength of coalitions for the implementation of the threat of punishment.

In investigations of differential games dynamic programming technique is used. It allows representing problem of finding solution in the game as a solution of partial differential equation. In some cases such technique allows to find Nash equilibrium or cooperative solution. At the same time it is necessary to take into account existence and uniqueness of solution of differential equations, smoothness of Bellman function, instantaneous and terminal payoffs. These conditions are a major obstacle to determine the subclasses of differential games, in which it is possible to build a closed-loop strong equilibrium.

In this paper for any coalition a linear combination of players' payoffs in the coalition is considered. Sufficient conditions for strong equilibrium existence are formulated as conditions on parameters of such combination.

The differential game of three players is considered as an example, which is based on solution of couple of partial differential equations.

The purpose of this paper is to study static and differential games for the development of new techniques of building a closed-loop strong equilibrium, based on the formulation of new sufficient conditions for its existence.

In this paper sufficient conditions for the existence of the closed-loop strong equilibrium in the static and differential games are proposed. It has developed a special technique based on the scalarization of the vector criterion, whose components are functions of winning players in the coalition.

It allowed using dynamic programming method in the formulation and justification of sufficient conditions for existence of a strong equilibrium.

Sufficient conditions for existence of a closed-loop strong equilibrium are obtained in a constructive way, which suggests a new technique of building a strong equilibrium. Application of the technique is illustrated with examples of solution of differential games of three persons in the case of deterministic dynamics. A technique, developed in the paper, can be further developed to build a strong equilibrium in a broader class of differential games.

The practical significance of the result is based on practical areas of application of the results in the field of dynamic games, such as the formation of long-term agreements; environment protection; the joint development of mineral resources; research and development, supply-chain management and logistics.

Опубликованные научные доклады

№ 1(R)–2005	А. В. Бухвалов Д. Л. Волков	Фундаментальная ценность собственного капитала: использование в управлении компанией
№ 2(R)–2005	В. М. Полтерович О. Ю. Старков	Создание массовой ипотеки в России: проблема трансплантации
№1(E)–2006	I. S. Merkuryeva	The Structure and Determinants of Informal Employment in Russia: Evidence From NOBUS Data
№ 2(R)–2006	Т. Е. Андреева В. А. Чайка	Динамические способности фирмы: что необходимо, чтобы они были динамическими?
№ 3(R)–2006	Д. Л. Волков И. В. Березинец	Управление ценностью: анализ основанных на бухгалтерских показателях моделей оценки
№ 4(R)–2006	С. А. Вавилов К. Ю. Ермоленко	Управление инвестиционным портфелем на финансовых рынках в рамках подхода, альтернативного стратегии самофинансирования
№ 5(R)–2006	Г. В. Широкова	Стратегии российских компаний на разных стадиях жизненного цикла: попытка эмпирического анализа
№ 6(R)–2006	Д. В. Овсянко В. А. Чайка	Особенности организации процесса непрерывного улучшения качества в российских компаниях и его связь с процессами стратегического поведения
№ 7(R)–2006	А. Н. Козырев	Экономика интеллектуального капитала
№ 8(R)–2006	Н. А. Зенкевич, Л. А. Петросян	Проблема временной состоятельности кооперативных решений
№ 9(R)–2006	Е. А. Дорофеев, О. А. Лапшина	Облигации с переменным купоном: принципы ценообразования
№ 10(E)–2006	T. E. Andreeva V. A. Chaika	Dynamic Capabilities: what they need to be dynamic?
№11(E)–2006	G. V. Shirokova	Strategies of Russian Companies at Different Stages of Organizational Life Cycle: an Attempt of Empirical Analysis
№12(R)–2006	А. Е. Лукьянова, Т. Г. Тумарова	Хеджевые фонды как инструменты снижения рисков и роста ценности компании
№13(R)–2006	Л. Н. Богомолова	Применение этнографических методов для изучения процессов принятия потребительских решений

№14(R)–2006	Е. К. Завьялова	Особенности профессионально-личностного потенциала и развития карьеры линейных менеджеров отечественных производственных предприятий
№15(R)–2006	С. В. Кошелева	Удовлетворенность трудом как комплексный диагностический показатель организационных проблем в управлении персоналом
№16(R)–2006	А. А. Румянцев, Ю. В. Федотов	Экономико-статистический анализ результатов инновационной деятельности в промышленности Санкт-Петербурга
№17(R)–2006	Е. К. Завьялова	Взаимосвязь организационной культуры и систем мотивации и стимулирования персонала
№18(R)–2006	А. Д. Чанько	Алгебра и гармония HR-менеджмента. Эффективность обучения персонала и диагностика организационной культуры
№19(E)–2006	T. E. Andreeva	Organizational change in Russian companies: findings from research project
№20(E)–2006	N. E. Zenkevich, L. A. Petrosjan	Time-consistency of Cooperative Solutions
№21(R)–2006	Т. Е. Андреева	Организационные изменения в российских компаниях: результаты эмпирического исследования
№22(R)–2006	Д. Л. Волков, Т. А. Гаранина	Оценивание интеллектуального капитала российских компаний
№23(R)–2006	А. В. Бухвалов, Ю. Б. Ильина, О. В. Бандалюк	Электронное корпоративное управление и проблемы раскрытия информации: сравнительное пилотное исследование
№24(R)–2006	С. В. Кошелева	Особенности командно-ролевого взаимодействия менеджеров среднего и высшего звена международной и российских компаний
№25(R)–2006	Ю. В. Федотов, Н. В. Хованов	Методы построения сводных оценок эффективности деятельности сложных производственных систем
#26(E)–2006	S. Kouchtch, M. Smirnova, K. Krotov, A. Starkov	Managing Relationships in Russian Companies: Results of an Empirical Study
№27(R)–2006	А. Н. Андреева	Портфельный подход к управлению люксовыми брендами в фэшн-бизнесе: базовые концепции, ретроспектива и

		возможные сценарии
№28(R)–2006	Н. В. Хованов, Ю. В. Федотов	Модели учета неопределенности при построении сводных показателей эффективности деятельности сложных производственных систем
№29(R)–2006	Е. В. Соколова, Ю. В. Федотов, Н. В. Хованов.	Построение сводной оценки эффективности комплексов мероприятий по повышению надежности функционирования объектов электроэнергетики
#30(E)–2006	M. Smirnova	Managing Buyer-Seller Relationships in Industrial Markets: A Value Creation Perspective
№31(R)–2006	С. П. Кущ, М. М. Смирнова	Управление взаимоотношениями в российских компаниях: разработка концептуальной модели исследования
№32(R)–2006	М. О. Латуха, В. А. Чайка, А. И. Шаталов	Влияние «жестких» и «мягких» факторов на успешность внедрения системы менеджмента качества: опыт российских компаний
№33(R)–2006	А. К. Казанцев, Л. С. Серова, Е. Г. Серова, Е. А. Руденко	Индикаторы мониторинга информационно-технологических ресурсов регионов России
№34(R)–2006	Т. Е. Андреева, Е. Е. Юртайкин, Т. А. Солтицкая	Практики развития персонала как инструмент привлечения, мотивации и удержания интеллектуальных работников
#35(E)–2006	T. Andreeva, E. Yurtaikin, T. Soltitskaya	Human resources development practices as a key tool to attract, motivate and retain knowledge workers
№36(R)–2006	А. В. Бухвалов, В. Л. Окулов.	Классические модели ценообразования на капитальные активы и российский финансовый рынок. Часть 1. Эмпирическая проверка модели CAPM. Часть 2. Возможность применения вариантов модели CAPM
№37(R)–2006	Е. Л. Шекова	Развитие корпоративной социальной ответственности в России: позиция бизнеса (на примере благотворительной деятельности компаний Северо-Западного региона)
№38(R)–2006	Н. А. Зенкевич, Л. А. Петросян	Дифференциальные игры в менеджменте

№39(R)–2006	В. Г. Беляков, О. Р. Верховская, В. К. Дерманов, М. Н. Румянцева	Глобальный мониторинг предпринимательской активности Россия: итоги 2006 года
№40(R)–2006	В. А. Чайка, А. В. Куликов	Динамические способности компании: введение в проблему
№41(R)–2006	Ю. Е. Благов	Институционализация менеджмента заинтересованных сторон в российских компаниях: проблемы и перспективы использования модели «Арктурус»
№42(R)–2006	И. С. Меркурьева, Е. Н. Парамонова, Ю. М. Битина, В. Л. Гильченок	Экономический анализ на основе связанных данных по занятым и работодателям: методология сбора и использования данных
#43(E)–2006	I. Merkuryeva, E. Paramonova, J. Bitina, V. Gilchenok	Economic Analysis Based on Matched Employer-Employee Data: Methodology of Data Collection and Research
№44(R)–2006	Н. П. Дроздова	Российская «артельность» — мифологема или реальность' (Артельные формы хозяйства в России в XIX — начале XX в.: историко-институциональный анализ)
№1(R)–2007	Е. В. Соколова	Бенчмаркинг в инфраструктурных отраслях: анализ методологии и практики применения (на примере электроэнергетики)
№2(R)–2007	С. П. Кущ, М. М. Смирнова	Управление поставками в российских компаниях: стратегия или тактика
№3(R)–2007	Т. М. Скляр	Проблема ленивой монополии в российском здравоохранении
№4(R)–2007	Т. Е. Андреева	Индивидуальные предпочтения работников к созданию и обмену знаниями: первые результаты исследования
№5(R)–2007	А. А. Голубева	Оценка порталов органов государственного управления на основе концепции общественной ценности
№6(R)–2007	С. П. Кущ, М. М. Смирнова	Механизм координации процессов управления взаимоотношениями компании с партнерами
#7(E)–2007	D. Volkov, I. Berezinets	Accounting-based valuations and market prices of equity: case of Russian market

№8(R)–2007	М. Н.Барышников	Баланс интересов в структуре собственности и управления российской фирмы в XIX – начале XX века
#9(E)–2007	D. Volkov, T. Garanina	Intellectual capital valuation: case of Russian companies
№10(R)–2007	К. В. Кротов	Управление цепями поставок: изучение концепции в контексте теории стратегического управления и маркетинга.
№11(R)–2007	Г. В. Широкова, А. И. Шаталов	Характеристики компаний на ранних стадиях жизненного цикла: анализ факторов, влияющих на показатели результативности их деятельности
№12(R)–2007	А. Е. Иванов	Размещение государственного заказа как задача разработки и принятия управленческого решения
№ 13(R)-2007	О. М. Удовиченко	Понятие, классификация, измерение и оценка нематериальных активов (объектов) компании: подходы к проблеме
№14(R)–2007	Г. В. Широкова, Д. М. Кнатько	Влияние основателя на развитие организации: сравнительный анализ компаний управляемых основателями и наемными менеджерами
#15(E)–2007	G. Shirokova, A. Shatalov	Characteristics of companies at the early stages of the lifecycle: analysis of factors influencing new venture performance in Russia
#16(E)–2007	N. Drozdova	Russian “Artel’nost” — Myth or Reality' Artel’ as an Organizational Form in the XIX — Early XX Century Russian Economy: Comparative and Historical Institutional Analysis
#1(E)–2008	S. Commander, J. Svejnar, K. Tinn	Explaining the Performance of Firms and Countries: What Does the Business Environment Play'
№1(R)–2008	Г. В. Широкова, В. А. Сарычева, Е. Ю. Благов, А. В. Куликов	Внутрифирменное предпринимательство: подходы к изучению вопроса
№1A(R)–2008	Г. В. Широкова, А. И. Шаталов, Д. М. Кнатько	Факторы, влияющие на принятие решения основателем компании о передаче полномочий профессиональному менеджеру: опыт стран СНГ и Центральной и Восточной Европы

№ 2(R)–2008	Г. В. Широкова, А. И. Шаталов	Факторы роста российских предпринимательских фирм: результаты эмпирического анализа
№ 1(R)–2009	Н. А. Зенкевич	Моделирование устойчивого совместного предприятия
№ 2 (R)–2009	Г. В. Широкова, И. В. Березинец, А. И. Шаталов	Влияние организационных изменений на рост фирмы
№ 3 (R)–2009	Г. В. Широкова, М. Ю. Молодцова, М. А. Арепьева	Влияние социальных сетей на разных этапах развития предпринимательской фирмы: результаты анализа данных Глобального мониторинга предпринимательства в России
# 4 (E)–2009	N. Drozdova	Russian Artel Revisited through the Lens of the New Institutional Economics
№ 5 (R)–2009	Л. Е. Шепелёв	Проблемы организации нефтяного производства в дореволюционной России
№ 6 (R)–2009	Е. В. Соколова	Влияние государственной политики на инновационность рынков: постановка проблемы
№ 7 (R)–2009	А. А. Голубева, Е. В. Соколова	Инновации в общественном секторе: введение в проблему
# 8 (E)–2009	A. Damodaran	Climate Financing Approaches and Systems: An Emerging Country Perspective
№ 1 (R)–2010	И. Н. Баранов	Конкуренция в сфере здравоохранения
№ 2 (R)–2010	Т. А. Пустовалова	Построение модели оценки кредитного риска кредитного портфеля коммерческого банка (на основе методологии VAR)
№ 3 (R)–2010	Ю. В.Лаптев	Влияние кризиса на стратегии развития российских МНК
№ 4 (R)–2010	А. В. Куликов, Г. В. Широкова	Внутрифирменные ориентации и их влияние на рост: опыт российских малых и средних предприятий
# 5 (E)–2010	M. Storchevoy	A General Theory of the Firm: From Knight to Relationship Marketing
№ 6 (R)–2010	А. А. Семенов	Появление систем научного менеджмента в России
# 7 (E)–2010	D. Ivanov	An optimal-control based integrated model of supply chain scheduling
№ 8 (R)–2010	Н. П. Дроздова, И.Г.Кормилицына	Экономическая политика государства и формирование инвестиционного климата:

		опыт России конца XIX — начала XX вв.
№ 9 (R)–2010	Д. В. Овсянко	Направления применения компонентов менеджмента качества в стратегическом управлении компаниями
# 10 (E)–2010	V. Cherenkov	Toward the General Theory of Marketing: The State of the Art and One More Approach
№ 11 (R)–2010	В. Н. Тишков	Экономические реформы и деловая среда: опыт Китая
№ 12 (R)–2010	Т. Н. Клёмина	Исследовательские школы в организационной теории: факторы формирования и развития
№ 13 (R)–2010	И. Я. Чуракова	Направления использования методик выявления аномальных наблюдений при решении задач операционного менеджмента
№ 14 (R)–2010	К. В. Кротов	Направления развития концепции управления цепями поставок
№ 15 (R)–2010	А. Г. Медведев	Стратегические роли дочерних предприятий многонациональных корпораций в России
№ 16 (R)–2010	А. Н. Андреева	Влияние печатной рекламы на восприятие бренда Shalimar (1925 – 2010)
№ 17 (R)–2010	В. Л. Окулов	Ценность хеджирования для корпорации и рыночные ожидания
№ 1 (R)–2011	А. А. Муравьев	О российской экономической науке сквозь призму публикаций российских ученых в отечественных и зарубежных журналах за 2000–2009 гг.
№ 2 (R)–2011	С. И. Кирюков	Становление и развитие теории управления маркетинговыми каналами
№ 3 (R)–2011	Д. И. Баркан	Общая теория продаж в контексте дихотомии «развитие – рост»
№ 4 (E)–2011	K. V. Krotov, R. N. Germain	A Contingency Perspective on Centralization of Supply Chain Decision-making and its Role in the Transformation of Process R&D into Financial Performance